Prof. Dr. Alfred Toth

# Die Gegenstandsbereiche der Mathematik und der Semiotik

1. "Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen" (Dedekind 1893, S. vii f.). Es ist eine bemerkenswerte Feststellung, daß sich die Mathematiker die wohl essentiellste Frage, was denn eine Zahl überhaupt sei, je weniger stellten, desto stärker ihre Wissenschaft formalisiert wurde. Geht man in die Zeit vor der Logifizierung der Mathematik zurück, so kann man (wie das oft bei Wiederentdeckungen der Fall ist) erstaunliche und heute völlig vergessene Einsichten finden. Die folgenden Zitate sind aus Hegenberg (1821) abgelichtet wiedergegeben.

§. 1.

Alles, was sich vermehren oder vermindern läßt, heißt eine Größe, die Vermehrung oder Verminderung mag übrigens in der Wirklichkeit oder nur in der Vorstellung statt finden.

§. 3.

Ob es vollkommen gleichartige Dinge (Dinge von gleicher Art) gibt, ist eine Frage, mit deren Entscheidung wir uns hier nicht einlassen wollen. Indessen nennt man Dinge gleichartig, bei denen man in Bezug auf eine oder mehrere Eigenschaften, die wir an ihnen betrachten, das Gemeinschaftliche oder Übereinstimmende voraussetzen können; Dinge aber, wo eine solche Voraussetzung nicht statt hat, sind ungleichartig.

So sind z. B. eine Anzahl gerader Linien in so fern gleichartige Dinge, wenn man nur die einzige Eigenschaft, daß sie gerade Linien sind, an ihnen betrachtet und als gemeinschaftlich voraussetzen kann.

Der letztere Paragraph enthält also, allerdings nur implizit, die Forderung, daß in der Mathematik nur mit gleichen Größen operiert werden kann (vgl. dazu zuletzt Toth 2015), d.h. wir stehen vor der merkwürdigen Tatsache, daß reine Quantitäten durch die Qualitäten der Objekte, von denen sie abstrahiert sind, restringiert werden.

§. 6.

Eine Größe iſt einer andern gleich, wenn ſie durch Nichts von ihr unterſchieden iſt.

Hier handelt es sich um ein Schein-Axiom, denn es gibt keine Paare von Objekten, die sich in Nichts voneinander unterscheiden, d.h. es gibt keine Identität außerhalb der Selbstidentität. Dies gilt selbst für Zwillinge mit identischer Erbstruktur, sie sind dennoch einander nur gleich, aber nicht identisch, da es sich ja sichtbarerweise um zwei Subjekte und nicht nur um eines handelt (vgl. dazu Menne 1992, S. 65 ff.). Streng genommen folgt hieraus, daß einander Größen nicht gleich sein können und daß der Größenbegriff zur Definition des Zahlbegriffes unbrauchbar ist.

2. Hegenberg bemerkt die letztere logische Folgerung allerdings nicht und definiert also den Zahlbegriff auf der Basis des Größenbegriffes, auch wenn dieser interessanterweise nicht in der Definition der Zahl genannt wird.

§. 1.

Erklärung. Eine Zahl iſt eine Menge oder ein Vielfaches von Dingen gleicher Art (gleichartige Dinge). Das Gleichartige, deſſen Menge durch die Zahl ausgedrückt wird, heißt die Einheit, daher iſt eine Zahl auch eine beſtimmte Menge von Einheiten.

Dafür spricht Hegenberg in abgeschwächter Weise von "gleichartigen" Dingen, d.h. solchen, die sich durchaus durch mehr als als durch "Nichts" voneinander unterscheiden können. Das ist jedoch etwas ganz anderes. Zur Illustration betrachte man die folgende Gleichung

1 Apfel + 1 Apfel = ?

Nach Hegenbergs erster Definition, d.h. der Forderung, daß sich zwei Objekte in Nichts unterscheiden, ist diese Gleichung unlösbar, denn es kann sich danach ja nur um einen einzigen Apfel handeln, da sich ein Objekt nur von sich selbst in Nichts unterscheiden kann. Allerdings impliziert auch Hegenbergs zweite Definition, d.h. die Forderung gleichartiger Objekte, ein Problem, denn in diesem Fall hängt die Lösbarkeit der Gleichung von der Sortigkeit der Apfel-Objekte ab. Liegt der folgende erste Fall vor,

d.h. Gleichsortigkeit, dann ist die Gleichung lösbar, und die Summe lautet: 2 Äpfel. Liegt hingegen der folgende zweite Fall vor,

dann ist die Gleichung wiederum unlösbar.

Wesentlich an Hegenbergs beiden miteinander inkompatiblen Zahl-Definitionen kann somit nur die Bestimmung der Zahl als einer Menge von Objekten sein. Wir drücken die Forderung der Gleichsortigkeit durch hochgestellte Inzides aus.

$Za = \{\Omega^{i}_{1}, ..., \Omega^{i}_{n}\}$.

Demnach sind zwei Zahlen verschieden nicht nur dann, wenn die Anzahlen ihrer Objekte, die wir durch tiefgestellte Indizes ausgedrückt haben, verschieden sind,

$Za1 \neq Za2$ gdw. $\{\Omega^{i}_{1}, ..., \Omega^{i}_{n}\} \neq \{\Omega^{i}_{1}, ..., \Omega^{i}_{m}\}$ mit $n \neq m$

sondern zusätzlich dann, wenn ihre Sortigkeiten verschieden sind

$Za1 \neq Za2$ gdw. $\{\Omega^{i}_{1}, ..., \Omega^{i}_{n}\} \neq \{\Omega^{j}_{1}, ..., \Omega^{j}_{n}\}$ mit $n \neq m$.

Die Gleichsortigkeitsbedigung, die besser bekannt ist unter dem Verbot "Äpfel und Birnen zu addieren", führt also paradoxerweise wiederum dazu, daß sich zwei Zahlen, die ja ausdrücklich als "reine Quantitäten" eingeführt wurden, nicht nur durch die Quantitäten, sondern auch durch die Qualitäten der Objekte unterscheiden, die in ihren Mengen enthalten sind. Man beachte übrigens, daß ein einziges Objekt als Element der Mengen der Zahlen genügt, um die Ungleichheit der Zahlen zu bewirken, wenn sich also z.B. in einer von zwei Kisten mit gleicher Anzahl von Gala-Äpfeln ein einziger Jonathan-Apfel befindet.

3. Mit Objekten und Mengen von Objekten hat es aber nicht nur die Mathematik, sondern vor allem die Semiotik zu tun. Bense ging bekanntlich sogar so weit, daß er das Zeichen, das auf ein Objekt abgebildet wird, als "Metaobjekt" definierte (Bense 1967, S. 9). Wie in Toth (2014) gezeigt, kann man diese Abbildung als Metaobjektivation eines Objektes durch

$\mu: \quad \Omega \rightarrow Ze$

ausdrücken. WENN ALSO DER GEGENSTANDSBEREICH DER MATHEMATIK MENGEN VON OBJEKTEN SIND, SO IST DER GEGENSTANDSBEREICH DER SEMIOTIK DAS OBJEKT SELBST. Da der Begriff der Menge von Objekten eine Abstraktion des Begriffes des Objektes ist, muß die Semiotik der Mathematik vorangehen, denn erst dann, wenn ein Objekt da ist, kann man Mengen von Objekten bilden. Ein Problem bildet aber wieder bzw. immer noch die qualitative Relevanz der angeblich reinen Quantitäten der Objekte der Zahlen, während sie für die Zeichen überhaupt kein Problem darstellt, da das Zeichen als eine triadische Relation eingeführt wird, in der Quantität und Qualität vereinigt sind, und zwar bereits durch die dreifache Unterteilung des semiotischen Mittelbezugs in qualitatives Qualizeichen, in quantitatives Sinzeichen und in essentielles Legizeichen. Das bedeutet also, daß diese drei Bestimmungsstücke von Objekten in der Metaobjektivation und damit im Zeichen, wenigstens als Invarianten, erhalten bleiben, während dies bei den Zahlen, wenigstens vorgeblicher Weise, nicht der Fall ist. Wenn wir nun Gleichungen der Form

$1 + 2 = 3$

betrachten, so haben wir es hier nicht mit Zahlen im Sinne von Mengen von Objekten zu tun, sondern mit Ziffern, welche diese Zahlen bezeichnen, d.h. die Zahlen sind die Objekte, welche durch die Ziffern als Zeichen bezeichnet werden. Wenn jedoch Ziffern als Zahlzeichen fungieren, so müssen auch sie die Forderung des Zeichens als einer triadischen Relation über einem Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug erfüllen. In Sonderheit gibt es keine Zeichen, die reine Mittelbezüge sind. Daraus folgt, daß Ziffern wie alle Zeichen Bezeichnungs- und Bedeutungsfunktion bzw. Sinn und Bedeutung haben müssen. Damit sind sie aber wiederum nicht nur quantitativ, sondern qualitativ relevant. Es ist somit nicht nur so, daß durch die Forderung von Gleichsortigkeit von Objekten reine Quantitäten gar keine sind, sondern daß in Sonderheit durch die Operationen mit Ziffern, welche die Zahlen bezeichnen, in der Mathematik vollständige Qualitäten vorliegen. Schreibt man nun die qualitative Gleichung

1 Apfel + 1 Apfel = ?

in der angeblich quantitativen Form

$1 + 1 = ?$,

so läßt sich aus den genannten zwei Gründen auf keine Weise beweisen, daß die Summe "2" ist, denn es handelt sich bei der Ziffer "1" um ein Zeichen, welches der Zeichendefinition

$Ze = R(M, O, I)$

genügt, und die übliche "Lösung"

$1 + 1 = 2$

setzt eine falsche Zeichendefinition $Ze = M$ voraus. In Sonderheit ist also diese Gleichung gar nicht lösbar, weil weder eine Bezeichnungsfunktion f: $(M \rightarrow O)$,

noch eine Bedeutungsfunktion

g: $(O \rightarrow I)$

angebbar ist, solange nicht klar ist, welche die Referenzobjekte der beiden Ziffern-Zeichen "1" im Ausdruck "1 + 1" ist. Da wir bereits weiter oben nachgewiesen hatten, daß auch für Zahlen als durch die Ziffern bezeichnete Objekte Gleichungen nur dann lösbar sind, wenn man Hegenbergs zweiter Definition folgt, die also statt Identität Gleichsortigkeit der Objekte verlangt, so müßte zur Lösung von Gleichungen immer noch angegeben werden, von welchen Objekten denn gleiche Sorten operiert werden sollen, d.h. ob es sich z.B. um Äpfel, Steine oder Häuser handelt. Man sieht also sehr leicht ein, daß die Definition der Zahl auf dem Begriff der Größe, welcher wiederum auf demjenigen des notwendig qualitativen Objektes beruht, ins Nirgendwo führt und außer Verwirrung bloß logische Falschheit und semiotischen Unsinn produziert.

Literatur

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Dedekind, Richard, Was sind und was sollen die Zahlen? 2. Aufl. Braunschweig 1893

Hegenberg, F.A. Vollständiges Lehrbuch der einen Elementar-Mathematik. Bd. 1. Berlin 1821

Menne, Albert, Einführung in die Methodologie. 3. Aufl. Darmstadt 1992

Toth, Alfred, Formales System der Metaobjektivation I-III. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Grundlegung einer Arithmetik kontexturierter Objekte. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

18.4.2015